Metody aproksymacji wielomianowej

Implementacja praktyczna

Wstęp

Poniższa implementacja praktyczna stanowi uzupełnienie teoretycznych rozważań na temat metod numerycznych aproksymacji funkcji za pomocą wielomianów i obejmuje następujące zagadnienia:

- Błąd średniokwadratowy
- Aproksymacja przy użyciu wielomianów algebraicznych ogólnych
- Aproksymacja przy użyciu wielomianów algebraicznych Grama
- Aproksymacja przy użyciu wielomianów trygonometrycznych

Przydatne narzędzia

Podczas obliczania współczynników wielomianów interpolacyjnych zachodzi konieczność rozwiązywania układów liniowych. Poniższa seria funkcji implementuje metodę eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego, omówioną dokładnie w ramach poprzedniego sprawozdania razem z dokładnymi komentarzami na temat wszystkich funkcji.

Funkcje łączące i rozdzielające macierze:

$$\text{sklej\_macierze\_poziomo}(\text{lhs}, \text{rhs}) := \left| \begin{array}{l} \text{return } (-1) \quad \text{if } \text{rows}(\text{lhs}) \neq \text{rows}(\text{rhs}) \\ \text{for } i \in 0 .. \text{cols}(\text{rhs}) - 1 \\ \quad \text{lhs}^{\langle \text{cols}(\text{lhs})+i \rangle} \leftarrow \text{rhs}^{\langle i \rangle} \\ \text{return lhs} \end{array} \right.$$

$$\text{wydziel\_macierz\_lewa}(\text{lhs}, \text{leftCols}) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0 .. \text{leftCols} - 1 \\ \quad \text{leftMatrix}^{\langle i \rangle} \leftarrow \text{lhs}^{\langle i \rangle} \\ \text{return leftMatrix} \end{array} \right.$$

$$\text{wydziel\_macierz\_prawa}(\text{lhs}, \text{leftCols}) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in \text{leftCols} .. \text{cols}(\text{lhs}) - 1 \\ \quad \text{rightMatrix}^{\langle i-\text{leftCols} \rangle} \leftarrow \text{lhs}^{\langle i \rangle} \\ \text{return rightMatrix} \end{array} \right.$$

Rozwiązywanie układu równań liniowych metodą podstawień dla współczynników w postaci macierzy trójkątnej górnej:

$$
\text{podstawienia\_U}(A,b) := \left|
\begin{array}{l}
x_{\text{last}(b)} \leftarrow \dfrac{b_{\text{last}(b)}}{A_{\text{last}(b),\,\text{last}(b)}} \\
\text{for } i \in \text{last}(b)-1\,..\,0 \\
\quad x_i \leftarrow \dfrac{b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{\text{last}(b)} \left(A_{i,j}\cdot x_j\right)}{A_{i,i}} \\
\text{return } x
\end{array}
\right.
$$

Metoda eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego:

$$
\text{gauss\_partial}(A,b) := \left|
\begin{array}{l}
A \leftarrow \text{sklej\_macierze\_poziomo}(A,b) \\
\text{for } i \in 0\,..\,\text{rows}(A)-2 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
\text{maxIdx} \leftarrow i \\
\text{for } \text{maxEl} \in i+1\,..\,\text{rows}(A)-1 \\
\quad \text{maxIdx} \leftarrow \text{maxEl} \ \text{ if } \left|A_{\text{maxIdx},i}\right| < \left|A_{\text{maxEl},i}\right| \\
\text{for } \text{swp} \in i\,..\,\text{cols}(A)-1 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
\text{swap} \leftarrow A_{i,\text{swp}} \\
A_{i,\text{swp}} \leftarrow A_{\text{maxIdx},\text{swp}} \\
A_{\text{maxIdx},\text{swp}} \leftarrow \text{swap}
\end{array}
\right. \\
\text{for } r \in i+1\,..\,\text{rows}(A)-1 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
\text{☼} \leftarrow \dfrac{A_{r,i}}{A_{i,i}} \\
\text{for } j \in i\,..\,\text{cols}(A)-1 \\
\quad A_{r,j} \leftarrow A_{r,j} - A_{i,j}\cdot \text{☼}
\end{array}
\right.
\end{array}
\right. \\
\text{return } A
\end{array}
\right.
$$

Poniższa funkcja skraca zapis rozwiązywania układów równań do jednego wywołania:

$$
\text{rozwiaz}(A,b) := \left|
\begin{array}{l}
\text{wynik} \leftarrow \text{gauss\_partial}(A,b) \\
C \leftarrow \text{wydziel\_macierz\_lewa}(\text{wynik},\text{cols}(A)) \\
d \leftarrow \text{wydziel\_macierz\_prawa}(\text{wynik},\text{cols}(A)) \\
\text{return } \text{podstawienia\_U}(C,d)
\end{array}
\right.
$$

Kolejna funkcja narzędziowa odnajduje w przekazanym wektorze punktów W punkty odpowiadające węzłom (w,y) i oblicza błąd bezwzględny. Funkcja zakłada, że węzły aproksymacji są posortowane względem rosnących wartości współrzędnej x.

$$\text{blad\_bezw}(W,w,y) := \left| \begin{array}{l} \text{licznik} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..\text{rows}(W)-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{wynik}_{\text{licznik}} \leftarrow W_{i,1} - y_{\text{licznik}} \ \text{ if } W_{i,0} = w_{\text{licznik}} \\ \text{licznik} \leftarrow \text{licznik} + 1 \ \text{ if } W_{i,0} = w_{\text{licznik}} \\ (\text{break}) \ \text{ if licznik} > \text{last}(w) \end{array} \right. \\ \text{return wynik} \end{array} \right.$$

Poniższe funkcje pozwala obliczyć sumę kwadratów błędów oraz jej średnią (czyli *de facto* błąd średniokwadratowy).

Suma kwadratów błędów:

$$\text{blad\_kw}(W,w,y) := \left| \begin{array}{l} \text{tmp} \leftarrow \text{blad\_bezw}(W,w,y) \\ \text{wynik} \leftarrow \displaystyle\sum_{i=0}^{\text{last(tmp)}} \left(\text{tmp}_i\right)^2 \end{array} \right.$$

Błąd średniokwadratowy:

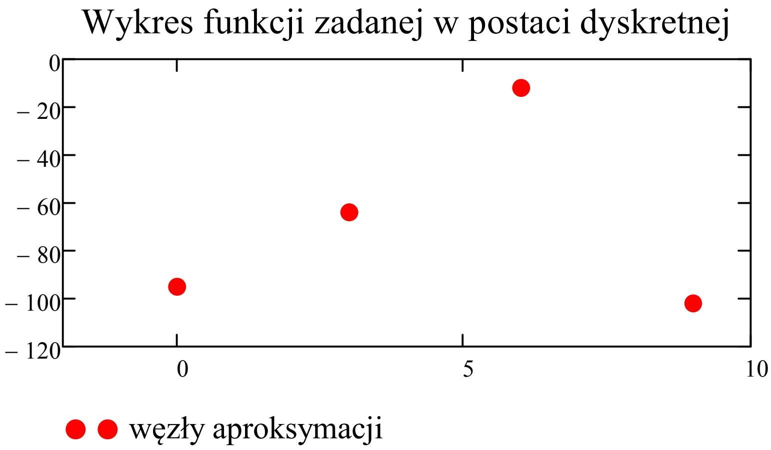
$$\text{blad\_srk}(W,w,y) := \left| \begin{array}{l} \text{tmp} \leftarrow \text{blad\_kw}(W,w,y) \\ \text{return } \dfrac{\text{tmp}}{\text{last}(w)} \end{array} \right.$$

Aproksymacja wielomianami algebraicznymi

Wstęp do aproksymacji wielomianami algebraicznymi

Aproksymację wielomianami algebraicznymi rozpatrzyłem na przykładzie poniższej funkcji danej w postaci dyskretnej:

$$w := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} -95 \\ -64 \\ -12 \\ -102 \end{pmatrix}$$



Wszystkie wielomiany aproksymacyjne ze względów wydajnościowych rozpatrywałem na dyskretnym zbiorze punktów o współrzędnych x w zakresie od 0 do 10:

$$apR := (0 \quad 0.1 \quad 10)^T$$

Aproksymacja wielomianami w postaci ogólnej

Jak wyjaśnione zostało w części teoretycznej, musimy utworzyć tzw. układ równań normalnych. Układ ten to układ równań liniowych postaci Ax+b, gdzie wektor wyników x zawiera szukane przez nas współczynniki wielomianu aproksymacyjnego. Poniższa funkcja tworzy macierz współczynników układu normalnego na bazie przekazanych węzłów aproksymacji dla wielomianu o żądanym stopniu m:

$$\text{ogolne\_utworz\_normalnyA}(w, y, m) := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..m \\ \quad \text{for } i \in 0..m \\ \quad\quad A_{i,k} \leftarrow \displaystyle\sum_{j=0}^{\text{last}(w)} \left(w_j\right)^{i+k} \\ \text{return } A \end{array} \right.$$

Kolejna funkcja wylicza wektor wyrazów wolnych dla wielomianu stopnia m:

$$\text{ogolne\_utworz\_normalnyb}(w, y, m) := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..m \\ \quad b_k \leftarrow \displaystyle\sum_{j=0}^{\text{last}(w)} \left[y_j \left(w_j\right)^k\right] \\ \text{return } b \end{array} \right.$$

Poniższa funkcja wyznacza wielomian aproksymacyjny zadanego stopnia oraz wylicza jego wartości w podanym przedziale. Tak policzone wartości można od razu wyświetlać na wykresie.

$$
\text{apr\_ogolne}(w,y,m,r) := \left|
\begin{array}{l}
G \leftarrow \text{ogolne\_utworz\_normalnyA}(w,y,m) \\
b \leftarrow \text{ogolne\_utworz\_normalnyb}(w,y,m) \\
c \leftarrow \text{rozwiaz}(G,b) \\
itr \leftarrow 0 \\
\text{for } \ i \in r_0, r_1 .. r_2 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
wynik_{itr,0} \leftarrow i \\
wynik_{itr,1} \leftarrow \displaystyle\sum_{j=0}^{\text{last}(c)} \left(c_j \cdot i^j\right) \\
itr \leftarrow itr + 1
\end{array}
\right. \\
\text{return } \ wynik
\end{array}
\right.
$$

Z rozważań teoretycznych wynika, że skoro rozpatrywana funkcja jest zdefiniowana na czterech węzłach aproksymacji to wielomian stopnia 3 będzie już wielomianem interpolacyjnym dla tej funkcji. Aby sprawdzić ten wniosek oraz zbadać zachowanie wielomianów stopnia niższego obliczyłem i narysowałem na jednym wykresie zadaną funkcję oraz wielomiany aproksymacyjne stopni od 1 do 4:

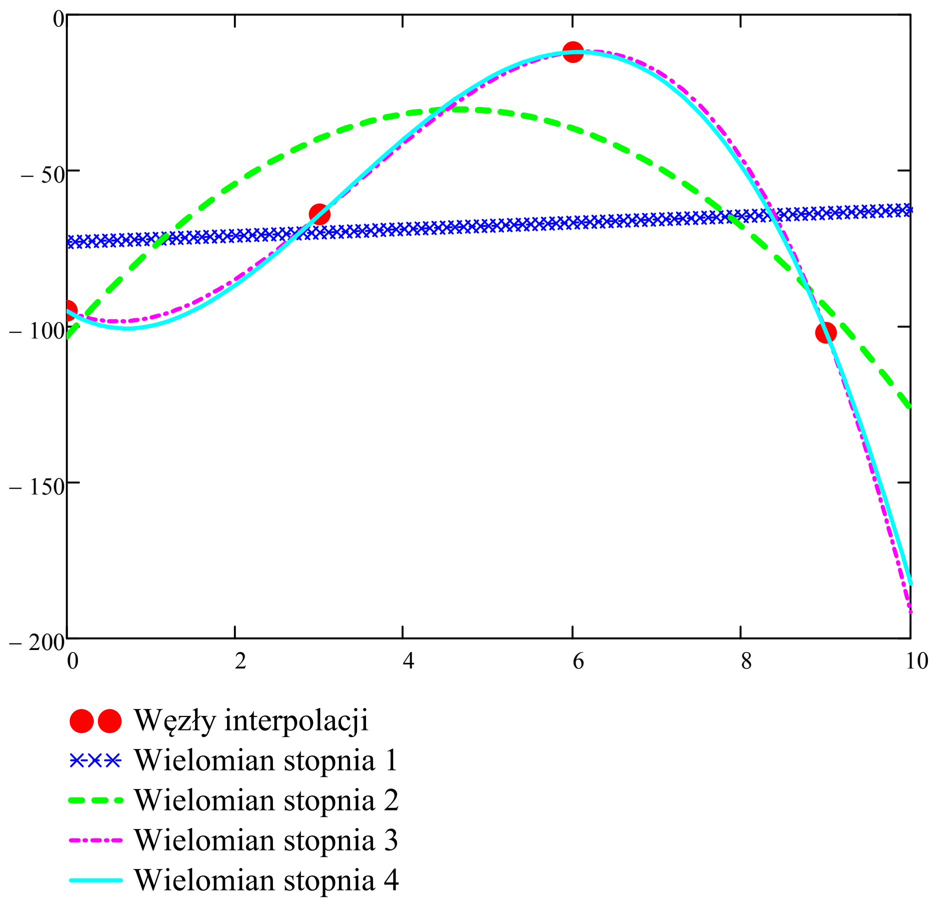
$w1 := \text{apr\_ogolne}(w,y,1,apR)$

$w2 := \text{apr\_ogolne}(w,y,2,apR)$

$w3 := \text{apr\_ogolne}(w,y,3,apR)$

$w4 := \text{apr\_ogolne}(w,y,4,apR)$

Aproksymacja wielomianami algebraicznymi ogólnymi



Poniżej obliczyłem błędy bezwzględne każdego z wielomianów. Błędem bezwzględnym wielomianu nazywam różnicę między wartością aproksymowaną a wartością w węźle.

$$b1 := \text{blad\_bezw}(w1, w, y) = \begin{pmatrix} 22.1 \\ -5.8 \\ -54.7 \\ 38.4 \end{pmatrix} \qquad b3 := \text{blad\_bezw}(w3, w, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5.4 \times 10^{-13} \\ 0 \\ 1.137 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

$$b2 := \text{blad\_bezw}(w2, w, y) = \begin{pmatrix} -8.15 \\ 24.45 \\ -24.45 \\ 8.15 \end{pmatrix} \qquad b4 := \text{blad\_bezw}(w4, w, y) = \begin{pmatrix} -2.7 \times 10^{-12} \\ 3.24 \times 10^{-12} \\ -1.933 \times 10^{-12} \\ 3.411 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

Obliczyłem też sumę kwadratów błędów i błąd średniokwadratowy:

$$bk1 := \text{blad\_kw}(w1, w, y) = 4.989 \times 10^{3} \qquad bk3 := \text{blad\_kw}(w3, w, y) = 0$$

$$bk2 := \text{blad\_kw}(w2, w, y) = 1.328 \times 10^{3} \qquad bk4 := \text{blad\_kw}(w4, w, y) = 0$$

$$bs1 := \text{blad\_srk}(w1, w, y) = 1.663 \times 10^{3} \qquad bs3 := \text{blad\_srk}(w3, w, y) = 0$$

$$bs2 := \text{blad\_srk}(w2, w, y) = 442.817 \qquad bs4 := \text{blad\_srk}(w4, w, y) = 0$$

Na podstawie analizy wykresu oraz informacji o błędach dokonałem następujących spostrzeżeń:

- Wielomiany stopnia 3 i 4 zgodnie z oczekiwaniami są wielomianami interpolacyjnymi. W węzłach aproksymacji mają one wartości równe wartościom w tych węzłach.
- Wielomian stopnia drugiego ma mniejszy błąd średniokwadratowy od wielomianu stopnia pierwszego. Jest to zgodne z oczekiwaniami.

Powyższe obserwacje stanowią doświadczalne potwierdzenie rozważań z części teoretycznej. Implementacja metody aproksymacji wielomianami ogólnymi działa prawidłowo i spełnia oczekiwania teoretyczne.

Aproksymacja wielomianami ortogonalnymi

Koncepcja wielomianów ortogonalnych została dokładnie wyjaśniona w części teoretycznej. Warunkiem koniecznym dla tej metody jest by węzły aproksymacji były równo odległe.

Poniższa funkcja implementuje iloczyn $\mathbf{a}^{[\mathbf{b}]}$:

$$\text{iloczyn}(a, b) := \left| \begin{array}{l} \text{return } \left[\left[\prod_{i=0}^{b-1} (a - i) \right]\right] \text{ if } b \neq 0 \\ \text{return } 1 \end{array} \right.$$

Dwumian Newtona:

$$\text{dwumian}(n, k) := \frac{n!}{k!\,(n - k)!}$$

Przekształcenie liniowe zamieniające węzły na liczby całkowite:

$$q(x, x0, h) := \frac{x - x0}{h}$$

Funkcja obliczająca wartość w punkcie x wielomianu ortogonalnego Grama stopnia k na podanych węzłach:

$$\text{gram}(k, q, w) := \sum_{s=0}^{k} \left[(-1)^s \cdot \text{dwumian}(k, s) \cdot \text{dwumian}(k + s, s) \cdot \frac{\text{iloczyn}(q, s)}{\text{iloczyn}(\text{last}(w), s)}\right]$$

$$\text{policz\_c}(k, w, y) := \sum_{i=0}^{\text{last}(w)} \left(y_i \cdot \text{gram}\left(k, q\left(w_i, w_0, w_1 - w_0\right), w\right)\right)$$

$$\text{policz\_s}(k, w, y) := \sum_{q=0}^{\text{last}(w)} \text{gram}(k, q, w)^2$$

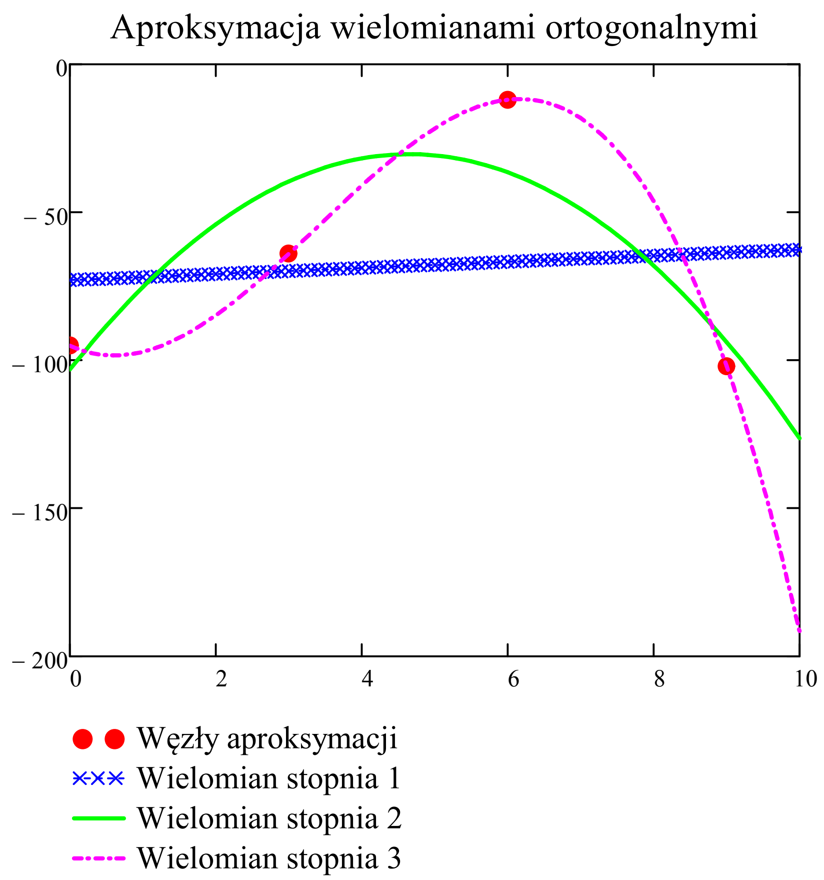
Poniższa funkcja wylicza wartości wielomianu aproksymacyjnego stopnia m na podanym zakresie r.

$$\text{apr\_orto}(w, y, m, r) := \left|\begin{array}{l} \text{itr} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in r_0, r_1 .. r_2 \\ \quad \left|\begin{array}{l} \text{wynik}_{\text{itr}, 0} \leftarrow i \\ \text{wynik}_{\text{itr}, 1} \leftarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{\text{policz\_c}(k, w, y)}{\text{policz\_s}(k, w, y)} \text{gram}\left(k, q\left(i, w_0, w_1 - w_0\right), w\right)\right) \\ \text{itr} \leftarrow \text{itr} + 1 \end{array}\right. \\ \text{return wynik} \end{array}\right.$$

$\text{wo1} := \text{apr\_orto}(w, y, 1, \text{apR})$

$\text{wo3} := \text{apr\_orto}(w, y, 3, \text{apR})$

$\text{wo2} := \text{apr\_orto}(w, y, 2, \text{apR})$



Poniżej obliczyłem błąd bezwzględny oraz sumę kwadratów błędów i błąd średniokwadratowy dla każdego z wielomianów oraz porównałem je z błędami obliczonymi dla wielomianów ogólnych:

$$bo1 := blad\_bezw(wo1, w, y) = \begin{pmatrix} 22.1 \\ -5.8 \\ -54.7 \\ 38.4 \end{pmatrix} \qquad bo1 - b1 = \begin{pmatrix} 2.842 \times 10^{-14} \\ 2.842 \times 10^{-14} \\ 1.421 \times 10^{-14} \\ 7.105 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

$$bo2 := blad\_bezw(wo2, w, y) = \begin{pmatrix} -8.15 \\ 24.45 \\ -24.45 \\ 8.15 \end{pmatrix} \qquad bo2 - b2 = \begin{pmatrix} 9.948 \times 10^{-14} \\ 7.105 \times 10^{-15} \\ -2.842 \times 10^{-14} \\ 2.842 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$$

$$bo3 := blad\_bezw(wo3, w, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad bo3 - b3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5.4 \times 10^{-13} \\ 0 \\ -1.137 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

$bok1 := blad\ kw(wo1, w, y) = 4.989 \times 10^{3}$

$bok2 := blad\_kw(wo2, w, y) = 1.328 \times 10^{3}$

$bok3 := blad\_kw(wo3, w, y) = 0$

$bos1 := blad\_srk(wo1, w, y) = 1.663 \times 10^{3}$

$bos2 := blad\_srk(wo2, w, y) = 442.817$

$bos3 := blad\_srk(wo3, w, y) = 0$

$bok1 - bk1 = 0$

$bok2 - bk2 = 6.821 \times 10^{-13}$

$bok3 - bk3 = 0$

$bos1 - bs1 = 0$

$bos2 - bs2 = 2.274 \times 10^{-13}$

$bos3 - bs3 = 0$

Poniżej porównałem ze sobą wartości wielomianów ortogonalnych i ogólnych odpowiednich stopni w celu sprawdzenia, o jaki czynnik maksymalny różnią się od siebie:

$$dfw1 := \max\left(\overrightarrow{|w1 - wo1|}\right) = 2.842 \times 10^{-14}$$

$$dfw2 := \max\left(\overrightarrow{|w2 - wo2|}\right) = 1.137 \times 10^{-13}$$

$$dfw3 := \max\left(\overrightarrow{|w3 - wo3|}\right) = 7.105 \times 10^{-13}$$

(w powyższych obliczeniach wartości rzędu 10^{-13} możemy spokojnie traktować jako zero)

Powyższe wyniki oraz analiza wykresów potwierdziły oczekiwania teoretyczne, mianowicie:

- Wielomian stopnia 3-ciego jest już wielomianem interpolacyjnym
- Błąd średniokwadratowy maleje ze stopniem wielomianu
- Wielomiany aproksymacyjne obliczone metodą wielomianów ortogonalnych i wielomianów ogólnych są identyczne; przyjęlismy założenie, że będą minimalizować błąd średniokwadratowy i ten wynik zgadza się z twierdzeniem, że istnieje dokładnie jeden wielomian stopnia n, który minimalizuje błąd średniokwadratowy.

Niewielkie różnice między wielomianami wyliczonymi metodą wielomianów ortogonalnych i wielomianów ogólnych wynikają z różnego sposobu obliczania i występujących w trakcie błędów.

Aproksymacja wielomianami trygonometrycznymi

Wstęp do aproksymacji wielomianami tygonometrycznymi

Aproksymację wielomianami trygonometrycznymi rozpatrzyłem na przykładzie dyskretnej funkcji okresowej zdefiniowanej w następujący sposób:

$N := 8$

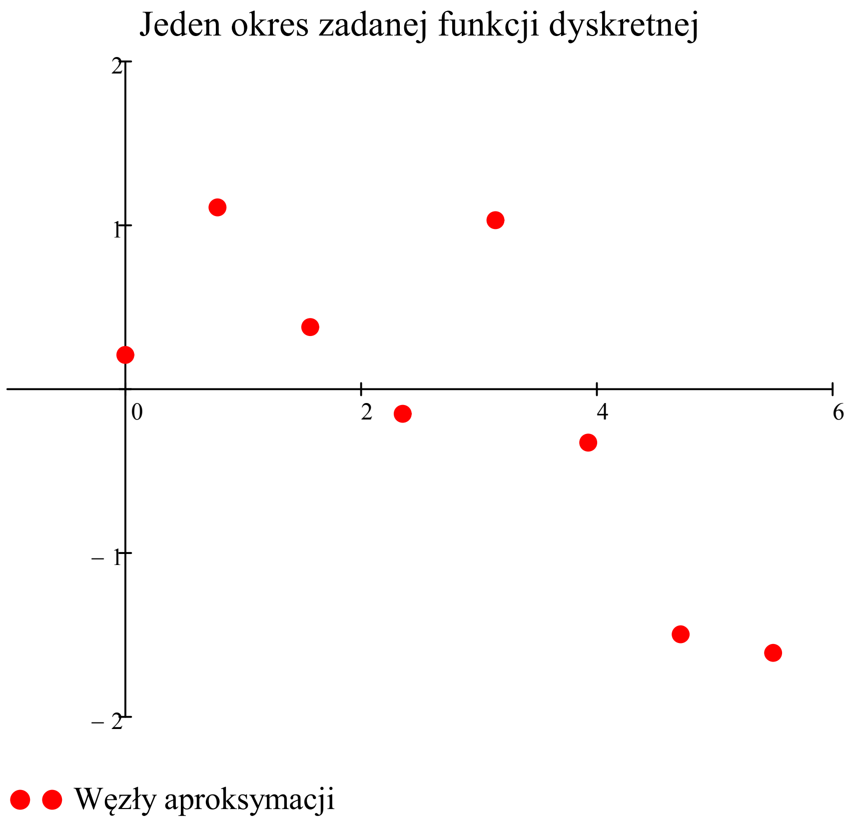
$w(i) := 2\pi \frac{i}{N}$

$$y := \begin{pmatrix} 0.208 \\ 1.108 \\ 0.378 \\ -0.15 \\ 1.03 \\ -0.326 \\ -1.497 \\ -1.61 \end{pmatrix}$$

Zdefiniujmy sobie pewne i:

$i := 0..N-1$

Jeden okres funkcji przedstawia się następująco:



Podobnie jak w przypadku wielomianów algebraicznych wielomiany aproksymacyjne rozpatrywałem na dyskretnym zbiorze punktów.

$$apR := \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{70} & 7 \end{pmatrix}^T$$

Aproksymacja wielomianami trygonometrycznymi

Poniższe funkcje wyliczają wielomian aproksymacyjny.

$$\text{tryg\_a}(w,y,s) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 1..s \\ \quad a_j \leftarrow \frac{2}{N}\cdot\sum_{i=0}^{N-1}\left(y_i\cdot\cos(j\cdot w(i))\right) \\ \text{return } a \end{array} \right.$$

$$\text{tryg\_a}(w,y,3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.21 \\ 0.589 \\ -0.201 \end{pmatrix}$$

$$\text{tryg\_b}(w,y,s) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 1..s \\ \quad b_j \leftarrow \frac{2}{N}\cdot\sum_{i=0}^{N-1}\left(y_i\cdot\sin(j\cdot w(i))\right) \\ \text{return } b \end{array} \right.$$

$$\text{tryg\_b}(w,y,3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.98 \\ 0.635 \\ 0.043 \end{pmatrix}$$

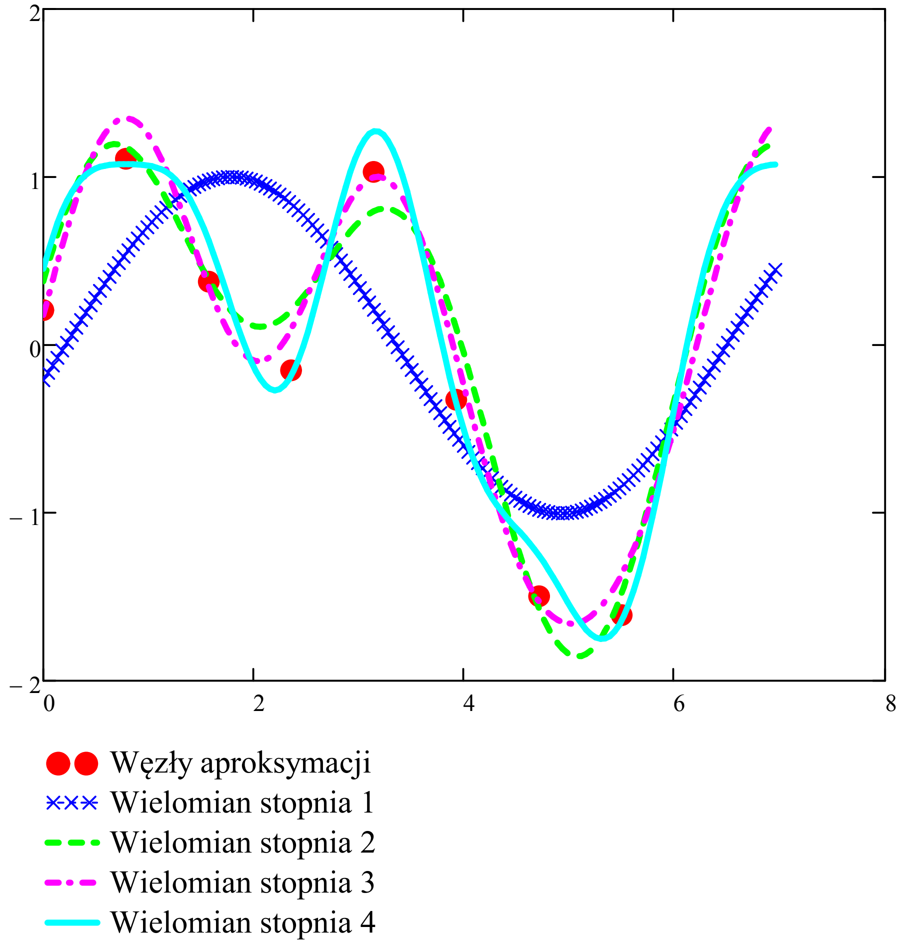
$$\text{apr\_tryg}(w,y,m,r) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow \text{tryg\_a}(w,y,m) \\ b \leftarrow \text{tryg\_b}(w,y,m) \\ itr \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in r_0, r_1 .. r_2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} wynik_{itr,0} \leftarrow i \\ wynik_{itr,1} \leftarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{m}\left(a_j \cos(j\cdot i) + b_j \sin(j\cdot i)\right) \\ itr \leftarrow itr + 1 \end{array} \right. \\ \text{return } wynik \end{array} \right.$$

Zgodnie z modelem teoretycznym sens ma wyliczenie jedynie wielomianów stopnia od 1 do 4:

$wt1 := \text{apr\_tryg}(w,y,1,apR)$ $wt3 := \text{apr\_tryg}(w,y,3,apR)$

$wt2 := \text{apr\_tryg}(w,y,2,apR)$ $wt4 := \text{apr\_tryg}(w,y,4,apR)$

Poniżej funkcja aproksymowana i wielomiany aproksymacyjne naniesione na jeden wykres:



(wykres nie posiada tytułu, gdyż jakakolwiek dalsza próba jego modyfikacji kończyła się awarią Mathcada)

Porównanie metod aproksymacyjnych

Poniżej znajduje się wyliczenie wielomianów interpolacyjnych stopni od 1 do 8 dla funkcji okresowej użytej do analizy wielomianów trygonometrycznych:

$wt_i := w(i)$

$wp1 := apr\_ogolne(wt, y, 1, apR)$

$wp2 := apr\_ogolne(wt, y, 2, apR)$

$wp3 := apr\_ogolne(wt, y, 3, apR)$

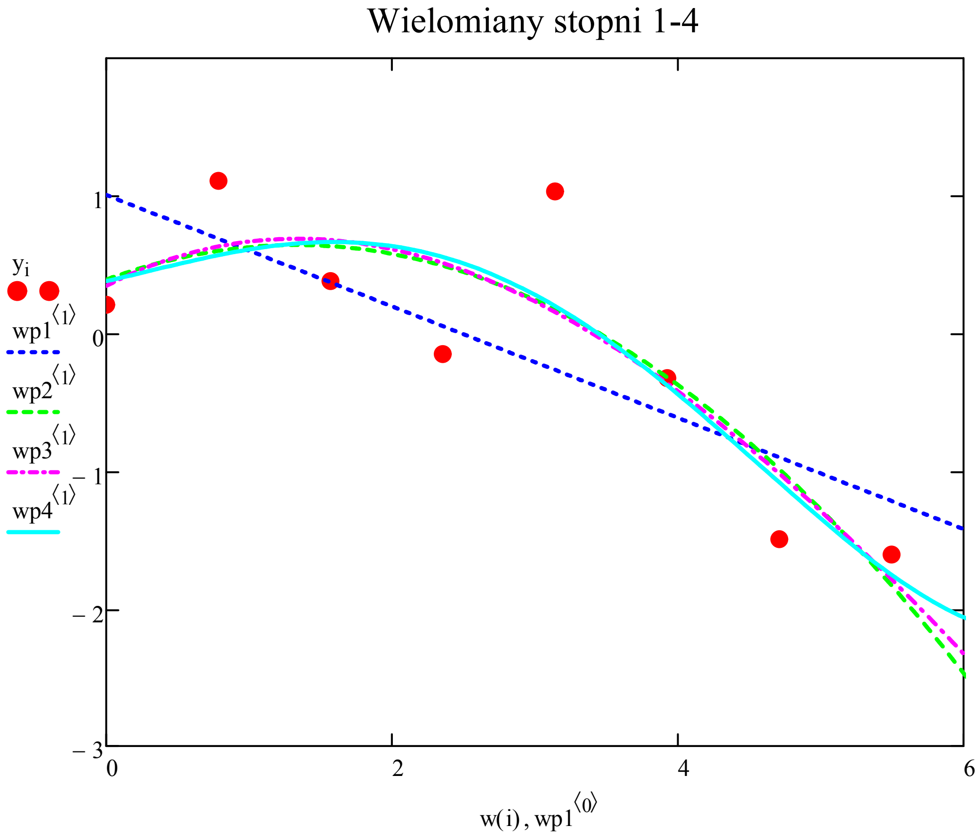
$wp4 := apr\_ogolne(wt, y, 4, apR)$

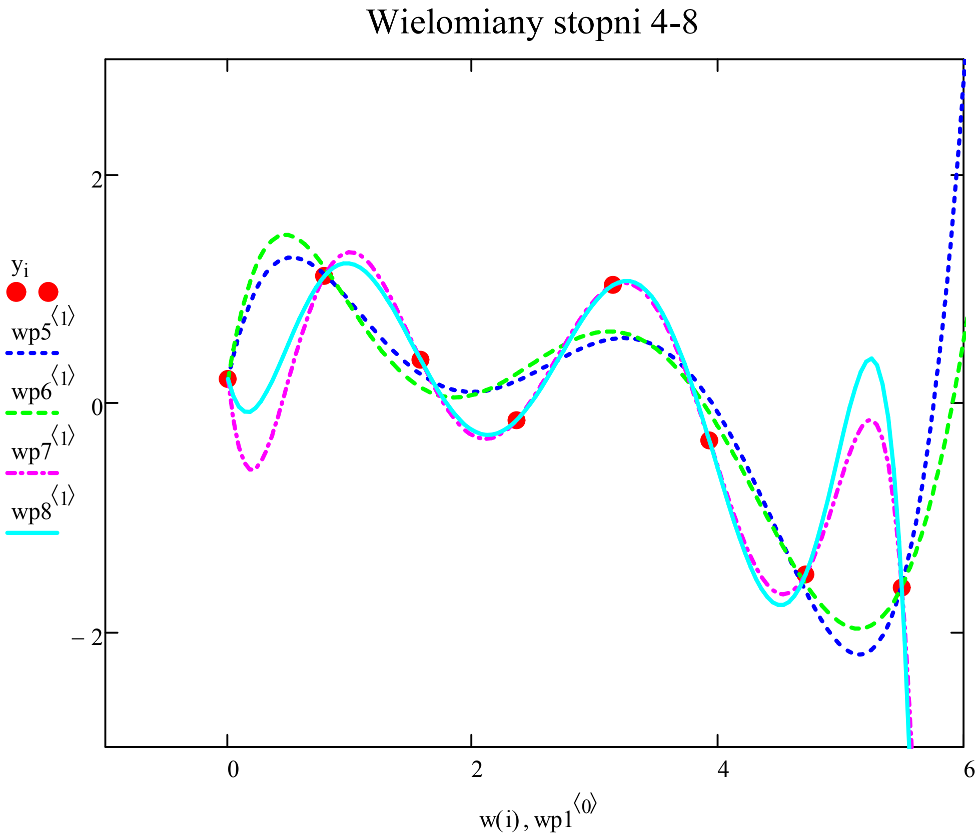
wp5 := apr_ogolne(wt, y, 5, apR)

wp6 := apr_ogolne(wt, y, 6, apR)

wp7 := apr_ogolne(wt, y, 7, apR)

wp8 := apr_ogolne(wt, y, 8, apR)





Z powyższych wykresów wynika, że w przypadku wielomianów algebraicznych dobrą jakość aproksymacji uzyskujemy dla stopnia wyższego niż w przypadku wielomianów trygonometrycznych.