Metoda eliminacji Gaussa z całkowitym wyborem elementu głównego

Implementacja praktyczna

Wstęp

Poniższa implementacja praktyczna stanowi uzupełnienie teoretycznych rozważań na temat metody eliminacji Gaussa z całkowitym wyborem elementu głównego dla rozwiązywania układów równań liniowych. Wykorzystuje ona kod omówiony dokładnie w III sprawozdaniu z Metod Numerycznych (metody numerycznego rozwiązywania układów równań liniowych).

Funkcje

Poniżej umieściłem garść funkcji dokładnie omówionych w trzecim sprawozdaniu, w tym implementację metody Gaussa z całkowitym wyborem elementu głównego.

$$\text{blad\_rozwiazania}(A, b, x) := A^{-1}b - x$$

Łączenie i dzielenie macierzy:

$$\text{sklej\_macierze\_poziomo}(lhs, rhs) := \left|\begin{array}{l} \text{return } (-1) \ \text{ if } \ \text{rows}(lhs) \neq \text{rows}(rhs) \\ \text{for } \ i \in 0..\text{cols}(rhs) - 1 \\ \quad lhs^{\langle \text{cols}(lhs)+i \rangle} \leftarrow rhs^{\langle i \rangle} \\ \text{return } \ lhs \end{array}\right.$$

$$\text{wydziel\_macierz\_lewa}(lhs, leftCols) := \left|\begin{array}{l} \text{for } \ i \in 0..leftCols - 1 \\ \quad leftMatrix^{\langle i \rangle} \leftarrow lhs^{\langle i \rangle} \\ \text{return } \ leftMatrix \end{array}\right.$$

$$\text{wydziel\_macierz\_prawa}(lhs, leftCols) := \left|\begin{array}{l} \text{for } \ i \in leftCols..\text{cols}(lhs) - 1 \\ \quad rightMatrix^{\langle i - leftCols \rangle} \leftarrow lhs^{\langle i \rangle} \\ \text{return } \ rightMatrix \end{array}\right.$$

Metoda podstawień wstecznych dla współczynników w postaci macierzy trójkątnej górnej:

$$\text{podstawienia\_U}(A,b) := \left| \begin{array}{l} x_{\text{last}(b)} \leftarrow \dfrac{b_{\text{last}(b)}}{A_{\text{last}(b),\,\text{last}(b)}} \\ \text{for } i \in \text{last}(b) - 1 \,..\, 0 \\ \quad x_i \leftarrow \dfrac{b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{\text{last}(b)} \left(A_{i,j} \cdot x_j\right)}{A_{i,i}} \\ \text{return } x \end{array} \right.$$

Kodowanie i dekodowanie macierzy - sposób umieszczenia i wyodrębnienia informacji o pierwotnej kolejności równań w układzie (dokładniej objaśnione w części praktycznej sprawozdania III):

$$\text{funkcja\_kodujaca}(i,j) := i$$

$$\text{koduj\_macierz}(A) := A^{\langle \text{cols}(A) \rangle} \leftarrow \text{matrix}(\text{rows}(A), 1, \text{funkcja\_kodujaca})$$

$$\text{dekoduj\_macierz}(A) := \left| \begin{array}{l} A \leftarrow \text{csort}(A, \text{cols}(A) - 1) \\ A \leftarrow \text{wydziel\_macierz\_lewa}(A, \text{cols}(A) - 1) \end{array} \right.$$

Funkcja select_main_total() implementuje całkowity wybór elementu głównego. Bierze ona poprawkę na fakt, że przekazana jej macierz A jest macierzą zakodowaną, tj. posiada informacje o kolejności.

```
select_main_total(A, i) := | maxIdx ← (i, i)ᵀ
                           | for maxY ∈ i .. rows(A) − 1
                           |   for maxX ∈ i .. cols(A) − 3
                           |     maxIdx ← (maxY, maxX)ᵀ  if |A(maxIdx₀, maxIdx₁)| < |A maxY, maxX|
                           | swap ← A⟨(maxIdx₁)⟩
                           | A⟨(maxIdx₁)⟩ ← A⟨i⟩
                           | A⟨i⟩ ← swap
                           | swp ← A i, cols(A)−1
                           | A i, cols(A)−1 ← A(maxIdx₁, cols(A)−1)
                           | A maxIdx₁, cols(A)−1 ← swp
                           | for swp ∈ i .. cols(A) − 2
                           |   | swap2 ← A(maxIdx₀, swp)
                           |   | A(maxIdx₀, swp) ← A i, swp
                           |   | A i, swp ← swap2
                           | return A
```

Poniższa funkcja realizuje sam algorytm eliminacji zmiennych metodą Gaussa przy całkowitym wyborze elementu głównego. Zwracany wynik jest zakodowany.

```
gauss_total(A, b) := | A ← sklej_macierze_poziomo(A, b)
                     | A ← koduj_macierz(A)
                     | for i ∈ 0 .. rows(A) − 2
                     |   | A ← select_main_total(A, i)
                     |   | for r ∈ i + 1 .. rows(A) − 1
                     |   |   | ☼ ← A r,i / A i,i
                     |   |   | for j ∈ i .. cols(A) − 2
                     |   |   |   A r,j ← A r,j − A i,j · ☼
                     | return (A)
```

Przykłady

Poniżej rozwiązałem następujące równania:

- Znane ze sprawozdania III:

$$A\_1 := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad b\_1 := \begin{pmatrix} 36 \\ 30 \\ 84 \end{pmatrix} \qquad x\_1 := A\_1^{-1} b\_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- Znane z zadania dodatkowego I:

$$A\_2 := \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b\_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x\_2 := A\_2^{-1} b\_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Znane z zadania dodatkowego I:

$$A\_3 := \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad b\_3 := \begin{pmatrix} 60 \\ 33 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad x\_3 := A\_3^{-1} b\_3 = \begin{pmatrix} 11.588235 \\ 1.072398 \\ -1.651584 \end{pmatrix}$$

- Wymyślone na potrzeby tego zadania:

$$A\_4 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ -8 & -2 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ -9 & -7 & 2 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad b\_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad x\_4 := A\_4^{-1} b\_4 = \begin{pmatrix} 0.011051 \\ -0.381411 \\ -0.230094 \\ 0.875886 \\ 0.476056 \\ -1.406631 \end{pmatrix}$$

Poniższa funkcja zwraca wektor wynikowy będący rozwiązaniem układu:

```
rozwiaz(A, b) := | C ← gauss_total(A, b)
                 | U ← wydziel_macierz_lewa(C, cols(C) − 2)
                 | B ← wydziel_macierz_prawa(C, cols(C) − 2)
                 | kolejnosc ← wydziel_macierz_prawa(B, 1)
                 | B ← wydziel_macierz_lewa(B, 1)
                 | wynik ← podstawienia_U(U, B)
                 | wynik ← sklej_macierze_poziomo(wynik, kolejnosc)
                 | return  dekoduj_macierz(wynik)
```

Rozwiązania poszczególnych układów:

$$\text{rozwiaz}(A\_1, b\_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad x\_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{rozwiaz}(A\_2, b\_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x\_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rozwiaz}(A\_3, b\_3) = \begin{pmatrix} 11.588235 \\ 1.072398 \\ -1.651584 \end{pmatrix} \quad x\_3 = \begin{pmatrix} 11.588235 \\ 1.072398 \\ -1.651584 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rozwiaz}(A\_4, b\_4) = \begin{pmatrix} 0.011051 \\ -0.381411 \\ -0.230094 \\ 0.875886 \\ 0.476056 \\ -1.406631 \end{pmatrix} \quad x\_4 = \begin{pmatrix} 0.011051 \\ -0.381411 \\ -0.230094 \\ 0.875886 \\ 0.476056 \\ -1.406631 \end{pmatrix}$$

Warto przy tym wszystkim zwrócić uwagę, że równanie czwarte jest nie do rozwiązania dla metody eliminacji Gaussa bez wyboru elementu głównego z powodu zer znajdujących się na diagonali macierzy współczynników.