Metody Numeryczne – Zadanie Dodatkowe I

Metoda Sukcesywnych Nadrelaksacji (wstęp teoretyczny)

Wstęp

Tematem tego zadania są metody relaksacji i sukcesywnych nadrelaksacji (SOR) rozwiązywania układów równań liniowych. Zadanie to stanowi uzupełnienie sprawozdania III - [3].

Szkic części teoretycznej

- Relaksacja dla metody Gaussa-Seidla
- Wnioski praktyczne
- Bibliografia

Relaksacja dla metody Gaussa-Seidla

Rozważmy układ równań liniowych zapisany w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$Ax = B \qquad (1)$$

Macierze L D i U oznaczają rozkład macierzy współczynników A na macierze kolejno: poddiagonalną, diagonalną i naddiagonalną, tak iż spełniają one warunek:

$$A = L + D + U \quad (2)$$

Istnieje prosta modyfikacja metody iteracyjnej Gaussa-Seidla (dokładne omówienie tej metody można znaleźć w [1], [2], [3]) może znacznie przyśpieszyć jej zbieżność. Przypomnijmy za [3] podstawowy wzór iteracyjny metody Gaussa-Seidla:

$$D \cdot x^{(i+1)} = -L \cdot x^{(i+1)} - U \cdot x^{(i)} + b \quad (3)$$

Wzór (1) po modyfikacji opisanej w [2] wygląda następująco:

$$D \cdot x^{(i+1)} = -L \cdot \omega \cdot x^{(i+1)} - \left[\omega \cdot U - (1-\omega) \cdot D\right] \cdot x^{(i)} + \omega \cdot b \quad (4)$$

Dokonajmy przekształceń tego wzoru:

$$D \cdot x^{(i+1)} = -L \cdot \omega \cdot x^{(i+1)} - \left[\omega \cdot U - (1-\omega) \cdot D\right] \cdot x^{(i)} + \omega \cdot b \quad \left| + L \cdot \omega \cdot x^{(i+1)}\right.$$

$$(D + \omega \cdot L) \cdot x^{(i+1)} = \left(-\omega \cdot U + (1-\omega) \cdot D\right) \cdot x^{(i)} + \omega \cdot b \quad \left| \cdot (D + \omega \cdot L)^{-1} \text{ z lewej}\right.$$

$$x^{(i+1)} = (D + \omega \cdot L)^{-1}\left(-\omega \cdot U + (1-\omega) \cdot D\right)x^{(i)} + (D + \omega \cdot L)^{-1}\omega \cdot b \qquad (5)$$

We wzorze (5) stałą ω nazywamy *współczynnikiem relaksacji*. Zmieniając go możemy wpływać na zbieżność metody iteracyjnej. Zauważmy, że gdy $\omega = 1$, wzór (5) upraszcza się do tradycyjnej metody Gaussa-Seidla.

Należy pamiętać, że obowiązują nas cały czas warunki zbieżności związane z metodami iteracyjnymi, tj. promień spektralny $\sigma(B_{sor}) < 1$, gdzie $B_{sor} = (D + L \cdot \omega)^{-1} \cdot \left(-\omega \cdot U + (1-\omega) \cdot D\right)$.

Aby zagwarantować zbieżność tak zmodyfikowanej metody – *metody relaksacji* – do rozwiązania, współczynnik ω może przyjmować jedynie wartości z przedziału $(0, 2)$ (dowód można odnaleźć w [2]). Gdy współczynnik $\omega > 1$, mówimy o metodzie *kolejnych (sukcesywnych) nadrelaksacji (ang. Successive Over-Relaxation, SOR)*. Takie wartości współczynnika relaksacji zazwyczaj przyśpieszają zbieżność metody Gaussa-Seidla. Odpowiednio dobrana wartość parametru $\omega < 1$ pozwala uzyskać zbieżność w przypadku układów, które normalnie nie spełniają warunku zbieżności metody Gaussa-Seidla.

Wnioski praktyczne

- Dobór parametru ω jest wysoce zależny od problemu. Przy ustalonym współczynniku relaksacji metoda SOR może być szybciej zbieżna niż metoda Gaussa-Seidla dla jednego układu, ale wolniejsza dla innego.
- Odpowiednio dobrany parametr ω pozwala obliczyć rozwiązanie układu, dla którego metoda Gaussa-Seidla może nie być zbieżna.

Bibliografia

1. Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, „Metody Numeryczne", wydanie III, wyd. WNT, Warszawa 1982, 1993
2. Ake Björck, Germund Dahlquist, „Metody Numeryczne", wydanie II, wyd. PWN, Warszawa 1987
3. Jacek Złydach, „Metody Numeryczne – Sprawozdanie III", Kraków 2008, dostępne razem z tym dokumentem