

Interpolacja krzywymi sklejanymi stopnia drugiego (SPLINE-2)

Implementacja praktyczna

Wstęp

Poniższa praktyczna implementacja stanowi uzupełnienie teoretycznych rozważań na temat interpolacji za pomocą krzywych sklejanego drugiego stopnia. Wykorzystuje ona kod omówiony dokładnie w III sprawozdaniu z Metod Numerycznych (metody numerycznego rozwiązywania układów równań liniowych).

Funkcje

Poniżej umieściłem garść funkcji pomocniczych dokładnie omówionych w trzecim sprawozdaniu (między innymi faktoryzacja LU).

```
sklej_macierze_poziomo(lhs, rhs) :=
  return (-1) if rows(lhs) ≠ rows(rhs)
  for i ∈ 0..cols(rhs) - 1
    lhs<cols(lhs)+i> ← rhs<i>
  return lhs
```

```
wydziel_macierz_lewa(lhs, leftCols) :=
  for i ∈ 0..leftCols - 1
    leftMatrix<i> ← lhs<i>
  return leftMatrix
```

```
wydziel_macierz_prawa(lhs, leftCols) :=
  for i ∈ leftCols..cols(lhs) - 1
    rightMatrix<i-leftCols> ← lhs<i>
  return rightMatrix
```

```
podstawienia_U(A, b) :=
  x<last(b)> ←  $\frac{b_{\text{last}(b)}}{A_{\text{last}(b), \text{last}(b)}}$ 
  for i ∈ last(b) - 1..0
     $b_i - \sum_{j=i+1}^{\text{last}(b)} (A_{i,j} \cdot x_j)$ 
    x<i> ←  $\frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{\text{last}(b)} (A_{i,j} \cdot x_j)}{A_{i,i}}$ 
  return x
```

```

podstawienia_L(A, b) :=
  x0 ←  $\frac{b_0}{A_{0,0}}$ 
  for i ∈ 1..last(b)
    bi ←  $\sum_{j=0}^i (\text{if}(i \neq j, A_{i,j} \cdot x_j, 0))$ 
    xi ←  $\frac{b_i}{A_{i,i}}$ 
  return x

```

```

gaussian_LU(A) :=
  for i ∈ 0..rows(A) - 2
    for r ∈ i + 1..rows(A) - 1
      * ←  $\frac{A_{r,i}}{A_{i,i}}$ 
      for j ∈ i..cols(A) - 1
        Ar,j ← Ar,j - Ai,j · *
      Ar,i ← *
  return A

```

```

wydziel_L(A) :=
  for i ∈ 0..rows(A) - 1
    for j ∈ 0..i
      Li,j ← Ai,j if i ≠ j
      Li,j ← 1 otherwise
  return L

```

```

wydziel_U(A) :=
  for i ∈ 0..rows(A) - 1
    for j ∈ i..cols(A) - 1
      Ui,j ← Ai,j
  return U

```

Wstęp do interpolacji krzywą SPLINE-2

Zagadnienie interpolacji rozpatrzyłem na przykładzie poniższych dwóch funkcji:

$$f_1(x) := \frac{1}{1 + 25x^2} \quad f_2(x) := e^{-|x|} + \frac{1}{10}x$$

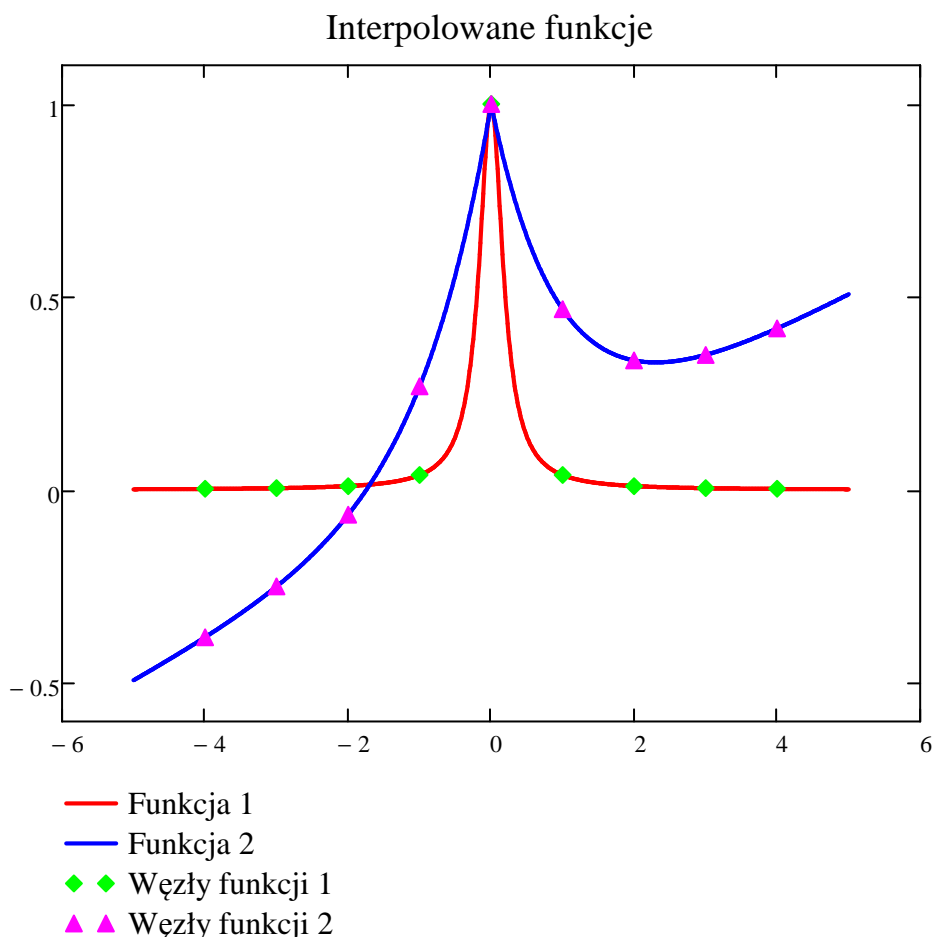
Przedział badania funkcji to:

$x1 := -5$ $step := 0.01$ $x2 := 5$ $x := x1, x1 + step.. x2$

Do interpolacji użyłem węzłów równoodległych:

$$w := \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad y1 := f1(w) = \begin{pmatrix} 2.493765586034912 \times 10^{-3} \\ 4.424778761061947 \times 10^{-3} \\ 9.900990099009901 \times 10^{-3} \\ 0.038461538461538 \\ 1 \\ 0.038461538461538 \\ 9.900990099009901 \times 10^{-3} \\ 4.424778761061947 \times 10^{-3} \\ 2.493765586034912 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad y2 := f2(w) = \begin{pmatrix} -0.381684361111266 \\ -0.250212931632136 \\ -0.064664716763387 \\ 0.267879441171442 \\ 1 \\ 0.467879441171442 \\ 0.335335283236613 \\ 0.349787068367864 \\ 0.418315638888734 \end{pmatrix}$$

Obie funkcje wraz z zaznaczonymi węzłami można zobaczyć na poniższym wykresie:



W celu umożliwienia elastycznego badania krzywych oraz optymalizacji czasu obliczeń postanowiłem, że wszystkie punkty wielomianu interpolacyjnego w zadanym wyżej zakresie zostaną wyliczone raz i nie będą przeliczane przy odświeżaniu wykresu. Dlatego zdefiniowałem poniższą funkcję pomocniczą:

$$\begin{aligned}
 W(x, C, w, y) := & \left| \begin{array}{l} \text{katory} \leftarrow \sum_{i=0}^{\text{last}(w)-1} \text{if}(x > w_i \wedge x \leq w_{i+1}, i, 0) + \text{if}(x > w_{\text{last}(w)}, \text{last}(w) - 1, 0) \\ \text{wynik} \leftarrow C_{2\text{katory}}(x - w_{\text{katory}})^2 + C_{2\text{katory}+1}(x - w_{\text{katory}}) + y_{\text{katory}} \\ \text{return wynik} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Funkcja ta oblicza wartość krzywej SPLINE-2 w punkcie x na podstawie wektora współczynników C oraz węzłów w i wartościach w węzłach y .

Poniższa funkcja tworzy wektor wartości wielomianu SPLINE-2 na podanym przedziale:

$$\begin{aligned}
 S(C, w, y, x1, \text{step}, x2) := & \left| \begin{array}{l} \text{licznik} \leftarrow 0 \\ \text{for } p \in x1, x1 + \text{step}.. x2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{wynik}_{\text{licznik}} \leftarrow W(p, C, w, y) \\ \text{licznik} \leftarrow \text{licznik} + 1 \end{array} \right. \\ \text{return wynik} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Dodatkowa pomocnicza funkcja tworząca wektor wartości x w podanym przedziale:

$$\begin{aligned}
 X(x1, \text{step}, x2) := & \left| \begin{array}{l} \text{licznik} \leftarrow 0 \\ \text{for } p \in x1, x1 + \text{step}.. x2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{wynik}_{\text{licznik}} \leftarrow p \\ \text{licznik} \leftarrow \text{licznik} + 1 \end{array} \right. \\ \text{return wynik} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Poniższa funkcja oblicza odległość między węzłami:

$$\text{dist}(k, w) := w_{k+1} - w_k$$

Równanie macierzowe SPLINE-2

We wstępie teoretycznym opisałem dokładne wyprowadzenie macierzowych równań dla krzywej SPLINE-2 poniżej znajduje się implementacja tego układu:

Funkcja poniżej tworzy fragment macierzy współczynników odpowiedzialny za n -tą parę równań ciągłości. **rmax** oznacza całkowitą liczbę równań.

$$\underline{\underline{R}}(n, rmax, w) := \left| \begin{array}{l} A_{2n, 2n} \leftarrow \text{dist}(n, w)^2 \\ A_{2n, (2n)+1} \leftarrow \text{dist}(n, w) \\ A_{(2n)+1, 2n} \leftarrow 2 \text{dist}(n, w) \\ A_{(2n)+1, (2n)+1} \leftarrow 1 \\ A_{(2n)+1, (2n)+3} \leftarrow -1 \\ A_{rmax-1, rmax-1} \leftarrow 0 \\ \text{return } A \end{array} \right.$$

Poniższa funkcja tworzy fragment macierzy współczynników odpowiedzialny za ostatni wielomian składowy SPLINE-2 i ostatni węzeł interpolacyjny. Przyjęty jest wariant z parametryzowaną pochodną w ostatnim węźle.

$$\text{Rost}(n, w) := \left| \begin{array}{l} A_{2n, 2n} \leftarrow \text{dist}(n, w)^2 \\ A_{2n, (2n)+1} \leftarrow \text{dist}(n, w) \\ A_{(2n)+1, 2n} \leftarrow 2 \text{dist}(n, w) \\ A_{(2n)+1, (2n)+1} \leftarrow 1 \\ \text{return } A \end{array} \right.$$

Poniższa funkcja tworzy fragment macierz wyrazów wolnych B odpowiedzialny za n-tą parę równań ciągłości.

$$\text{B}(n, rmax, w, y) := \left| \begin{array}{l} B_{2n, 0} \leftarrow y_{n+1} - y_n \\ B_{rmax-1, 0} \leftarrow 0 \quad \text{Zapewnienie właściwego rozmiaru macierzy potrzebnego do} \\ B_{(2n)+1, 0} \leftarrow 0 \quad \text{sumowania.} \\ \text{return } B \end{array} \right.$$

Poniższa funkcja oblicza współczynniki krzywej SPLINE-2 dla podanych węzłów w i wartości y w tych węzłach oraz wartości ostatniej pochodnej d przez bezpośrednie rozwiązanie równania macierzowego.

$$\text{S_mat}(w, y, d) := \left| \begin{array}{l} A \leftarrow \sum_{i=0}^{\text{last}(w)-2} R(i, 2 \text{last}(w), w) + \text{Rost}(\text{last}(w) - 1, w) \\ B \leftarrow \sum_{i=0}^{\text{last}(w)-1} B(i, 2 \text{last}(w), w, y) \\ B_{2 \text{last}(w)-1} \leftarrow d \quad \text{Parametryzacja pochodnej} \\ r \leftarrow A^{-1} B \\ \text{return } r \end{array} \right.$$

Współczynniki wielomianu interpolacyjnego dla funkcji 1 i 2 przy ostatniej pochodnej równej 0:

$$\text{smat}_1 := S_mat(w, y1, 0) =$$

| | 0 |
|----|------------------------|
| 0 | 3.748 |
| 1 | -3.746 |
| 2 | -3.744 |
| 3 | 3.75 |
| 4 | 3.768 |
| 5 | -3.739 |
| 6 | -2.835 |
| 7 | 3.796 |
| 8 | 0.912 |
| 9 | -1.873 |
| 10 | 0.021 |
| 11 | -0.05 |
| 12 | $1.614 \cdot 10^{-3}$ |
| 13 | $-7.09 \cdot 10^{-3}$ |
| 14 | $1.931 \cdot 10^{-3}$ |
| 15 | $-3.862 \cdot 10^{-3}$ |

$$\text{smat}_2 := S_mat(w, y2, 0) =$$

| | 0 |
|----|--------|
| 0 | 1.946 |
| 1 | -1.815 |
| 2 | -1.892 |
| 3 | 2.078 |
| 4 | 2.039 |
| 5 | -1.706 |
| 6 | -1.639 |
| 7 | 2.372 |
| 8 | 0.375 |
| 9 | -0.907 |
| 10 | 0.024 |
| 11 | -0.157 |
| 12 | 0.123 |
| 13 | -0.108 |
| 14 | -0.069 |
| 15 | 0.137 |

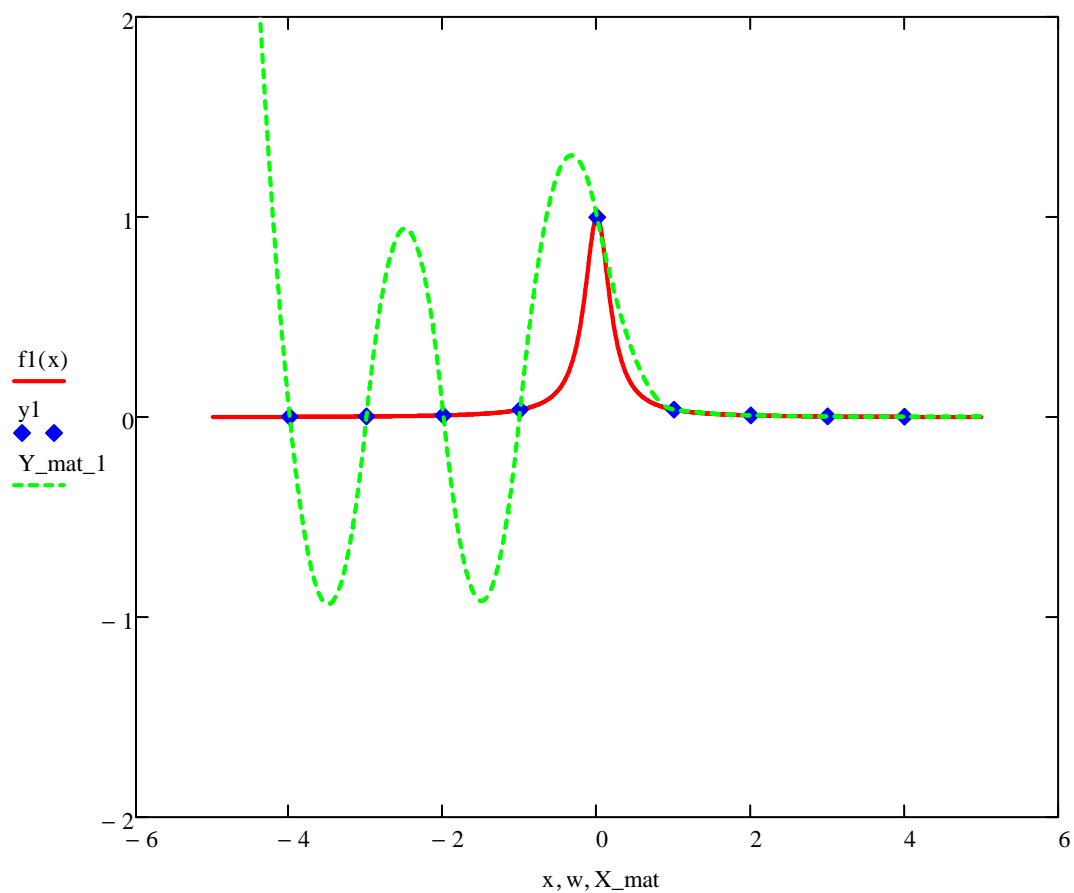
Wektor X potrzebny do wykresu:

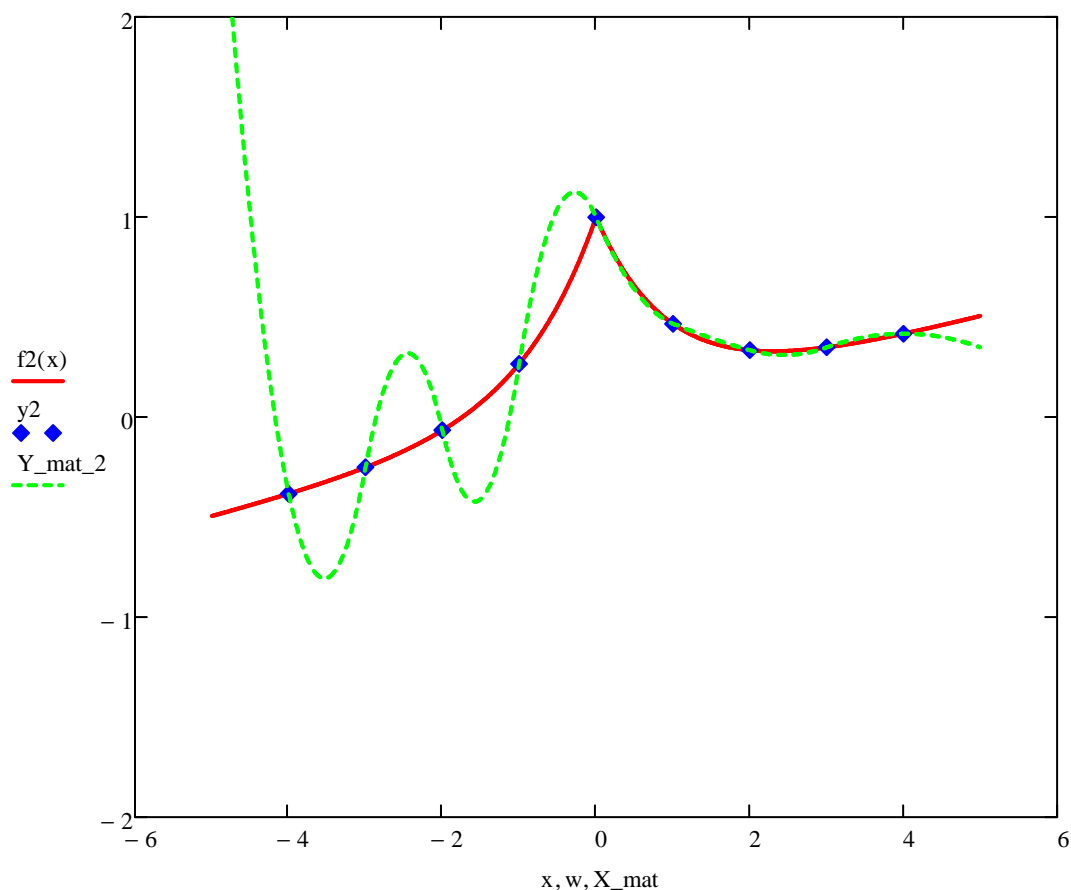
$$X_mat := X(x1, step, x2)$$

Wartości SPLINE-2 dla dwóch funkcji:

$$Y_mat_1 := S(\text{smat}_1, w, y1, x1, step, x2) \quad Y_mat_2 := S(\text{smat}_2, w, y2, x1, step, x2)$$

Wykresy przedstawiające rezultat interpolacji SPLINE-2:





(brak dodatkowego formatowania wykresów wynika po raz kolejny z błędów Mathcada)

Powyższe wykresy dość dobrze ilustrują problem z krzywymi SPLINE-2: występują w nich czasem bardzo potężne oscylacje, które czynią interpolację tymi krzywymi praktycznie bezużyteczną praktycznie. W powyższym wykresie ostatnia pochodna została ręcznie ustawiona na wartość 0, która jest bliska wartości pochodnej w tym punkcie dla obu interpolowanych funkcji. Można jednak sprawdzić, że dla wartości ostatniej pochodnej znacznie różniących się od wartości pochodnej interpolowanej funkcji także z prawej strony wykresu pojawią się pokaźne oscylacje.

Faktoryzacja LU

W części teoretycznej wysunąłem twierdzenie, jakoby przekształcone równanie krzywej SPLINE-2 nadawało się do faktoryzacji LU, pozwalając dla danego zestawu węzłów wyliczyć dane pośrednie. Obliczenia te pozwalają na szybsze wyliczenie współczynników krzywej SPLINE-2 dla dowolnej funkcji, którą rozpatrujemy w tych węzłach. Poniższy fragment sprawozdania przeznaczyłem na praktyczne sprawdzenie tego zagadnienia:

Zmodyfikowana macierz współczynników:

$$R_LU(n, rmax, w) := \left| \begin{array}{l} A_{2n, 2n} \leftarrow \text{dist}(n, w)^2 \\ A_{2n, (2n)+1} \leftarrow \text{dist}(n, w) \\ A_{(2n)+1, 2n} \leftarrow 0 \\ A_{(2n)+1, (2n)+1} \leftarrow -1 \\ A_{(2n)+1, (2n)+3} \leftarrow -1 \\ A_{rmax-1, rmax-1} \leftarrow 0 \\ \text{return } A \end{array} \right.$$

$$Rost_LU(n, w) := \left| \begin{array}{l} A_{2n, 2n} \leftarrow \text{dist}(n, w)^2 \\ A_{2n, (2n)+1} \leftarrow \text{dist}(n, w) \\ A_{(2n+1), 2n} \leftarrow 0 \\ A_{(2n+1), (2n)+1} \leftarrow 1 \\ \text{return } A \end{array} \right.$$

Zmodyfikowana macierz wyrazów wolnych B:

$$B_LU(n, rmax, w, y) := \left| \begin{array}{l} B_{2n, 0} \leftarrow y_{n+1} - y_n \\ B_{rmax-1, 0} \leftarrow 0 \\ B_{(2n)+1, 0} \leftarrow -2 \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{\text{dist}(n, w)} \right) \\ \text{return } B \end{array} \right.$$

Faktoryzacja LU macierzy współczynników dla węzłów równo odległych:

$$A_LU_przed := \sum_{i=0}^{\text{last}(w)-2} R_LU(i, 2 \text{last}(w), w) + Rost_LU(\text{last}(w) - 1, w)$$

$$A_LU := \text{gaussian_LU}(A_LU_przed)$$

Obliczenie macierzy współczynników B dla obu interpolowanych funkcji:

$$B_LU_1 := \sum_{i=0}^{\text{last}(w)-1} B_LU(i, 2 \text{last}(w), w, y1)$$

$$B_LU_1_{\text{last}(w)-1} := 0 \text{ (ostatnia pochodna)}$$

$$B_LU_2 := \sum_{i=0}^{\text{last}(w)-1} B_LU(i, 2 \text{last}(w), w, y2)$$

$$B_LU_2_{\text{last}(w)-1} := 0 \text{ (ostatnia pochodna)}$$

Poniższa funkcja oblicza współczynniki krzywej SPLINE-2 dla podanych macierzy **A** i **B** wyliczonych z procesu

faktoryzacji LU.

$$S_LU(A, B) := \begin{cases} y \leftarrow \text{podstawienia_L}(\text{wydziel_L}(A), B) \\ r \leftarrow \text{podstawienia_U}(\text{wydziel_U}(A), y) \\ \text{return } r \end{cases}$$

Obliczone współczynniki:

slu_1 := S_LU(A_LU, B_LU_1) =

| | |
|----|------------------------|
| | 0 |
| 0 | 3.752 |
| 1 | -3.75 |
| 2 | -3.748 |
| 3 | 3.754 |
| 4 | 3.771 |
| 5 | -3.743 |
| 6 | -2.838 |
| 7 | 3.8 |
| 8 | 0.915 |
| 9 | -1.877 |
| 10 | 0.018 |
| 11 | -0.046 |
| 12 | $5.476 \cdot 10^{-3}$ |
| 13 | -0.011 |
| 14 | $-1.931 \cdot 10^{-3}$ |
| 15 | 0 |

slu_2 := S_LU(A_LU, B_LU_2) =

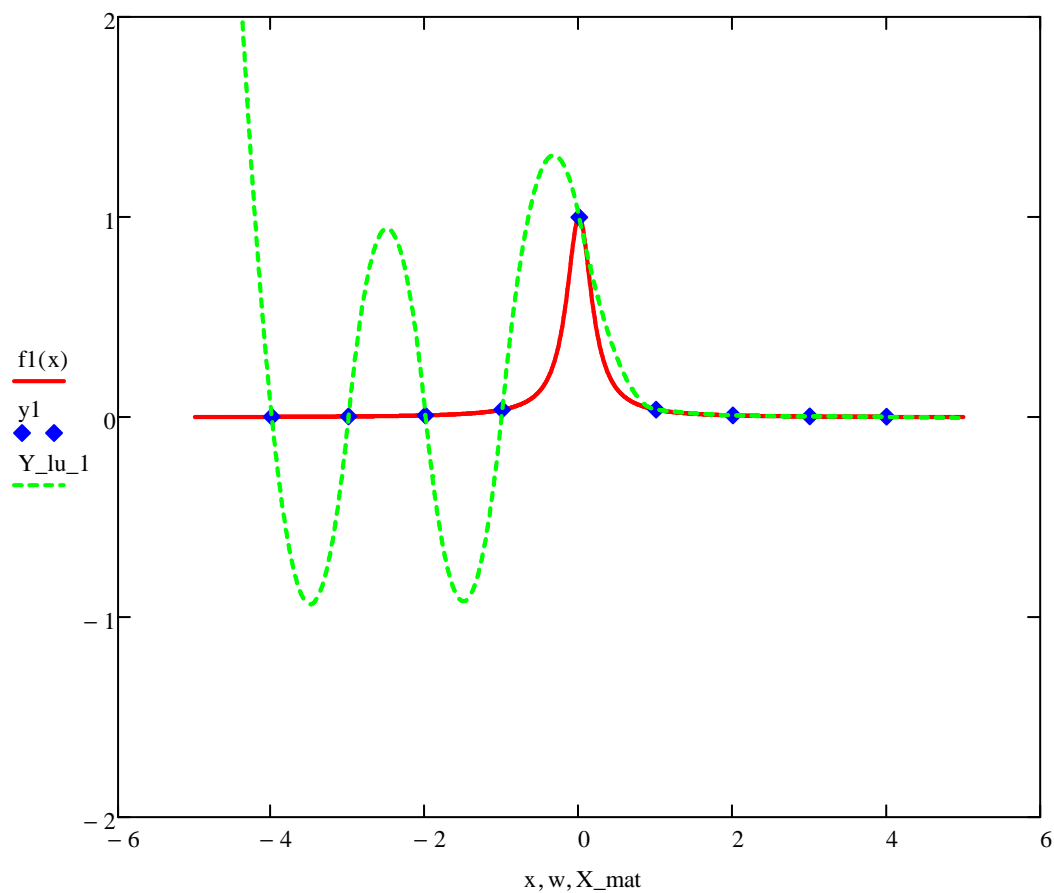
| | |
|----|--------|
| | 0 |
| 0 | 1.809 |
| 1 | -1.678 |
| 2 | -1.755 |
| 3 | 1.94 |
| 4 | 1.902 |
| 5 | -1.569 |
| 6 | -1.502 |
| 7 | 2.234 |
| 8 | 0.238 |
| 9 | -0.77 |
| 10 | 0.161 |
| 11 | -0.294 |
| 12 | -0.014 |
| 13 | 0.029 |
| 14 | 0.069 |
| 15 | 0 |

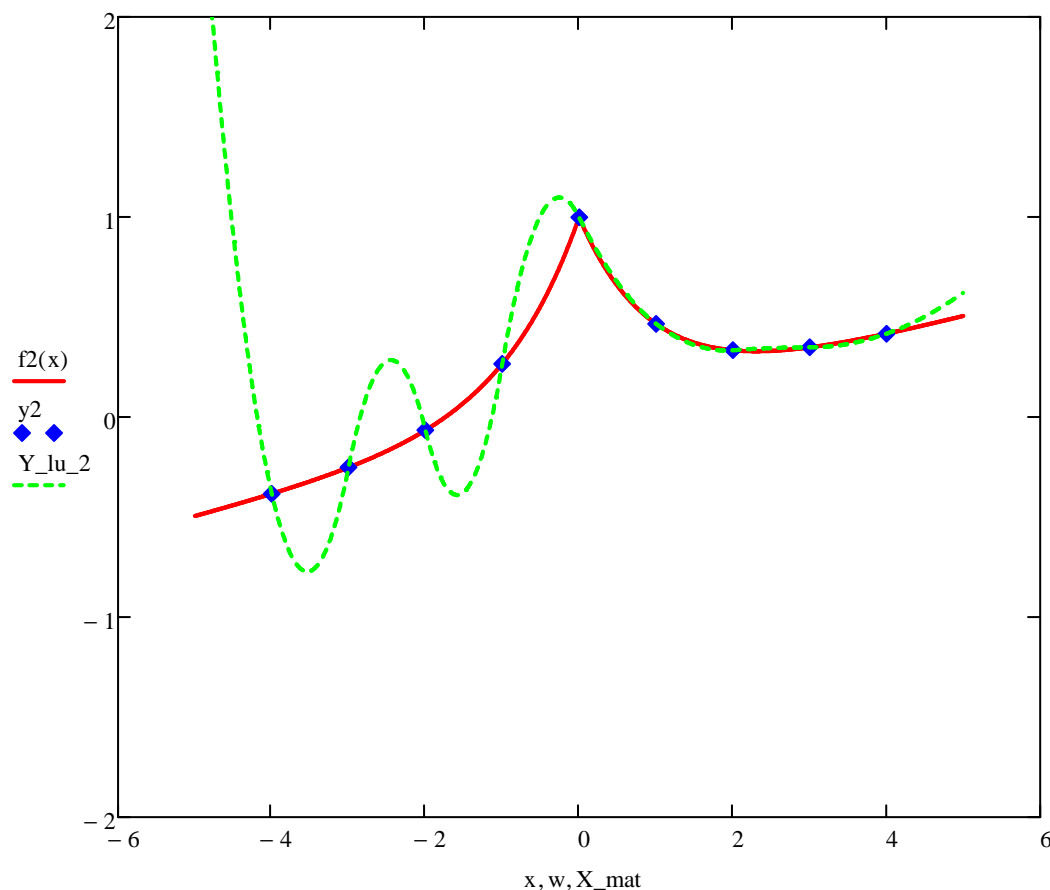
Wartości SPLINE-2 dla dwóch funkcji:

$Y_lu_1 := S(\text{slu_1}, w, y1, x1, \text{step}, x2)$

$Y_lu_2 := S(\text{slu_2}, w, y2, x1, \text{step}, x2)$

Wykresy interpolacji faktoryzacją LU:





Przewidywanie okazało się słuszne, wzory dla faktoryzacji LU sprawdzone. W powyższym przykładzie macierz współczynników policzyliśmy tylko raz, wobec czego złożoność obliczeniowa spadła z n^3 do n^2 . Wynika z tego, że gdybyśmy mieli k funkcji do interpolowania przy użyciu SPLINE-2 na tych samych węzłach, każdorazowe rozwiązanie równania miałoby łączną złożoność kn^3 , a w przypadku metody LU uzyskalibyśmy złożoność kn^2 . Przy k porównywalnym z n taka oszczędność ma duże znaczenie.

Wzory jawne dla krzywej SPLINE-2

Jeszcze szybszą od faktoryzacji LU metodą obliczenia współczynników krzywej SPLINE-2 jest wykorzystanie wzorów rekurencyjnych wyprowadzonych w części teoretycznej.

Poniższa funkcja oblicza współczynniki b wielomianów składowych SPLINE-2:

$$\begin{aligned}
 \text{wzory_B}(w, y, \text{lastB}) := & \left| \begin{array}{l}
 b_{2 \text{last}(w)+1} \leftarrow \text{lastB} \\
 \text{for } i \in 2 \text{last}(w) - 1, 2 \text{last}(w) - 3 .. 0 \\
 \quad \left| \begin{array}{l}
 \text{ktory} \leftarrow \text{floor}\left(\frac{i}{2}\right) \\
 b_i \leftarrow -\left(b_{i+2}\right) + 2 \frac{y_{\text{ktory}+1} - y_{\text{ktory}}}{w_{\text{ktory}+1} - w_{\text{ktory}}}
 \end{array} \right. \\
 \text{return } b
 \end{array} \right. \quad \text{dodatkowy współczynnik } b
 \end{aligned}$$

Po rekurencyjnym wyliczeniu współczynników b można użyć ich do obliczenia współczynników a. Poniższa funkcja realizuje to zadanie, uzupełniając przekazaną macierz o konieczne współczynniki:

$$\begin{aligned}
 \text{wzory_A}(w, y, b) := & \left| \begin{array}{l}
 \text{for } i \in 2 \text{last}(w) - 2, 2 \text{last}(w) - 4 .. 0 \\
 \quad \left| \begin{array}{l}
 \text{ktory} \leftarrow \text{floor}\left(\frac{i}{2}\right) \\
 b_i \leftarrow \frac{b_{i+3} - b_{i+1}}{2(w_{\text{ktory}+1} - w_{\text{ktory}})}
 \end{array} \right. \\
 \text{return } b
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Współczynniki SPLINE-2 obliczone dla obu funkcji:

$$\text{swzory_1} := \text{wzory_A}(w, y1, \text{wzory_B}(w, y1, 0))$$

$$\text{swzory_2} := \text{wzory_A}(w, y2, \text{wzory_B}(w, y2, 0))$$

swzory_1 =

| | 0 |
|----|------------------------|
| 0 | 3.748 |
| 1 | -3.746 |
| 2 | -3.744 |
| 3 | 3.75 |
| 4 | 3.768 |
| 5 | -3.739 |
| 6 | -2.835 |
| 7 | 3.796 |
| 8 | 0.912 |
| 9 | -1.873 |
| 10 | 0.021 |
| 11 | -0.05 |
| 12 | 1.614·10 ⁻³ |
| 13 | -7.09·10 ⁻³ |
| 14 | 1.931·10 ⁻³ |
| 15 | ... |

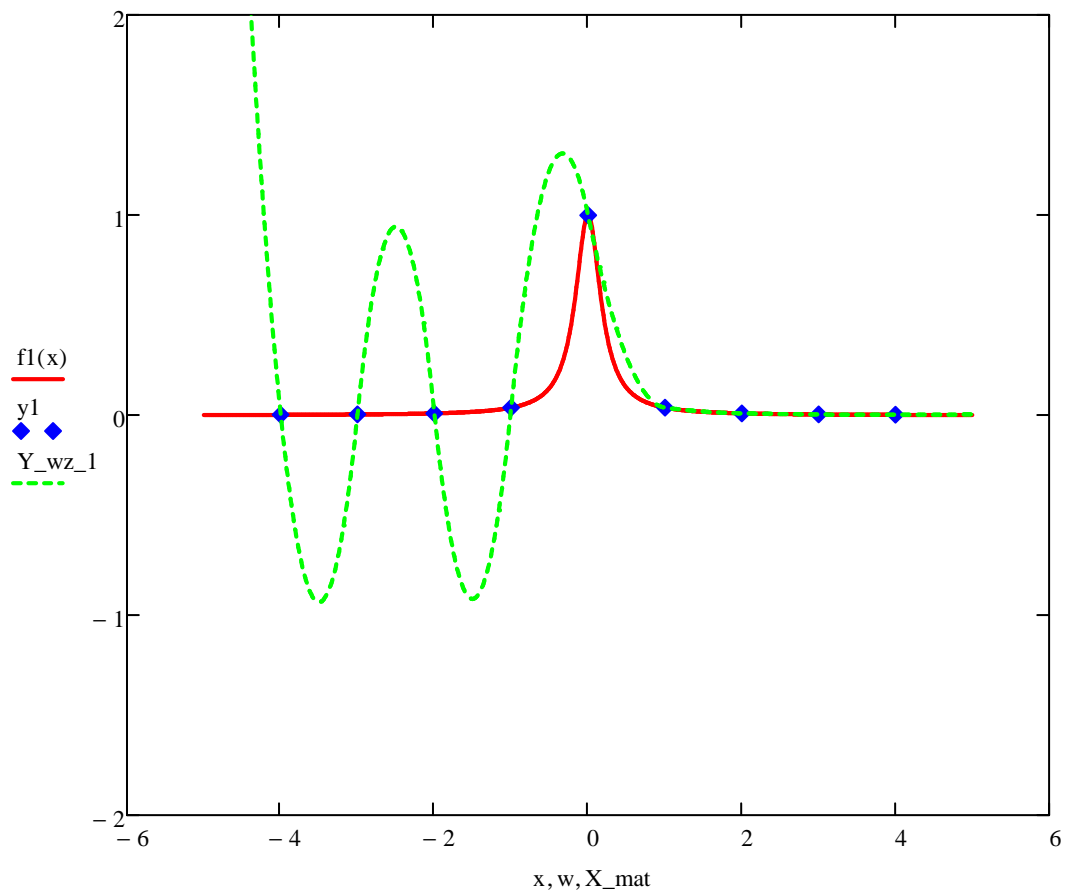
swzory_2 =

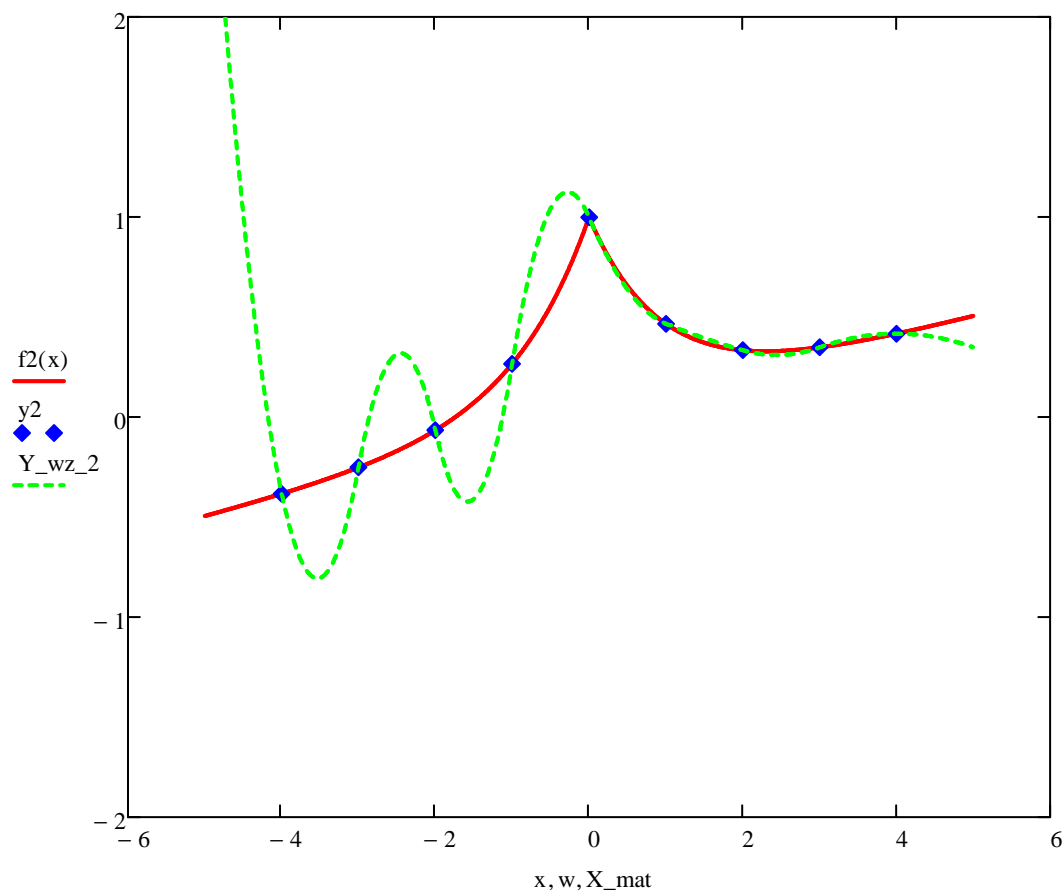
| | 0 |
|----|--------|
| 0 | 1.946 |
| 1 | -1.815 |
| 2 | -1.892 |
| 3 | 2.078 |
| 4 | 2.039 |
| 5 | -1.706 |
| 6 | -1.639 |
| 7 | 2.372 |
| 8 | 0.375 |
| 9 | -0.907 |
| 10 | 0.024 |
| 11 | -0.157 |
| 12 | 0.123 |
| 13 | -0.108 |
| 14 | -0.069 |
| 15 | ... |

$$Y_{wz_1} := S(\text{swzory_1}, w, y1, x1, \text{step}, x2)$$

$$Y_{wz_2} := S(\text{swzory_2}, w, y2, x1, \text{step}, x2)$$

Wykresy interpolacji wzorami jawnymi:





Ciekawe problemy

Poniżej zaprezentowałem doświadczalnie kilka zagadnień wspomnianych w części teoretycznej a związanych z krzywymi SPLINE-2:

Dobór ostatniej pochodnej

Żeby zilustrować, jak dobór pochodnej w ostatnim punkcie wpływa na całą interpolację, rozważyłem kilka krzywych SPLINE-2 dla funkcji 1:

$$S_dv1 := S_mat(w, y2, -4)$$

$$S_dv2 := S_mat(w, y2, -1)$$

$$S_dv3 := S_mat(w, y2, 5)$$

$$S_dv4 := S_mat(w, y2, linear_derv)$$

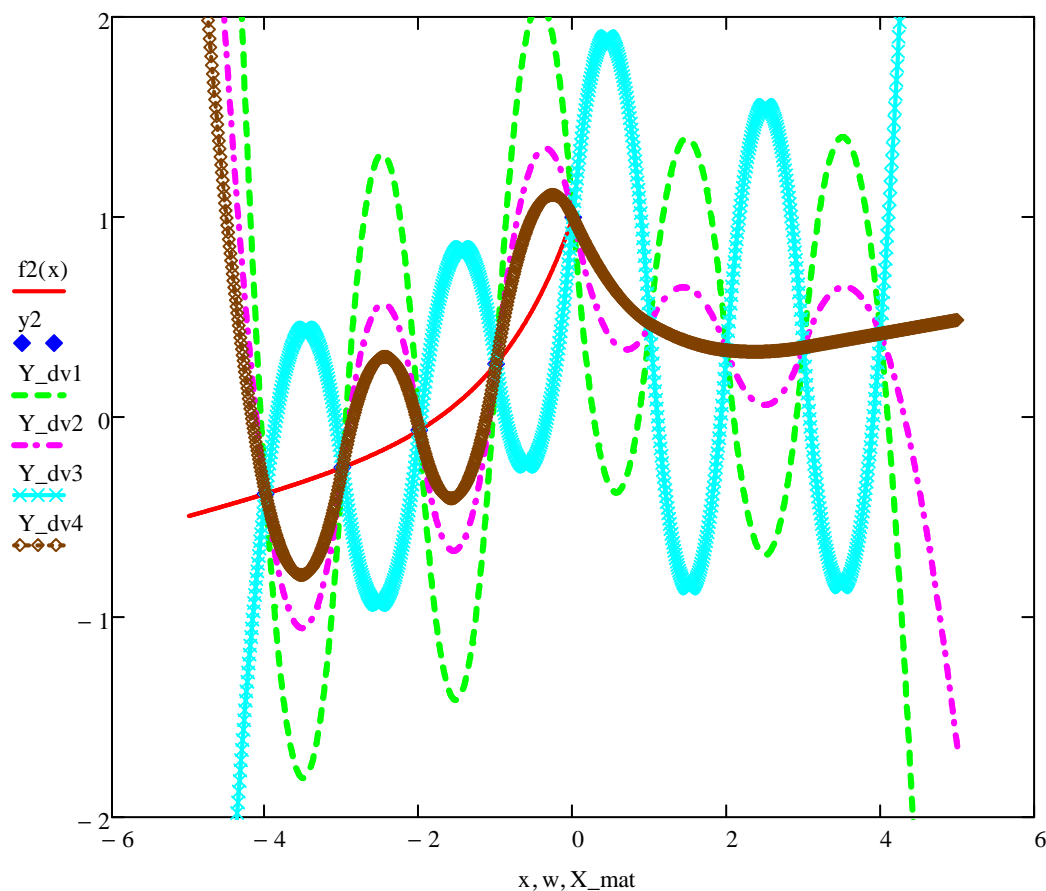
$$Y_dv1 := S(S_dv1, w, y2, x1, step, x2)$$

$$Y_dv2 := S(S_dv2, w, y2, x1, step, x2)$$

$$Y_dv3 := S(S_dv3, w, y2, x1, step, x2)$$

Przybliżenie pochodnej na końcu przy użyciu dwóch ostatnich węzłów:

$$linear_derv := \frac{y2_{last(y2)} - y2_{last(y2)-1}}{w_{last(w)} - w_{last(w)-1}} = 0.069$$

$$Y_dv4 := S(S_dv4, w, y2, x1, step, x2)$$


Powyzsza mozajka kolorystyczna pokazuje, ze w zaleznosci od doboru ostatniej pochodnej znacząco zmienia się zarówno kształt krzywej SPLINE-2 jak i dokładność, z jaką interpoluje ona zadaną funkcję.

Zapętlenie pochodnej

Ostatnią pochodną możemy też zdefiniować w taki sposób, by jej wartość była równa wartości pochodnej w pierwszym węźle. Wymaga to modyfikacji równania macierzowego, opisanego dokładniej w części teoretycznej. Modyfikacja została zaimplementowana poniżej:

$$\text{Rost_loop}(n, w) := \begin{cases} A_{2n, 2n} \leftarrow \text{dist}(n, w)^2 \\ A_{2n, (2n)+1} \leftarrow \text{dist}(n, w) \\ A_{(2n)+1, 2n} \leftarrow 0 \\ A_{(2n)+1, (2n)+1} \leftarrow 1 \\ A_{2n+1, 1} \leftarrow -1 \\ \text{return } A \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 S_loop(w, y) := & \left\{ \begin{aligned}
 & A \leftarrow \sum_{i=0}^{last(w)-2} R(i, 2 \cdot last(w), w) + Rost_loop(last(w) - 1, w) \\
 & B \leftarrow \sum_{i=0}^{last(w)-1} B(i, 2 \cdot last(w), w, y) \\
 & B_{2 \cdot last(w)-1} \leftarrow 0 \quad \text{W tym miejscu współczynnik musi przyjąć wartość 0} \\
 & r \leftarrow A^{-1} B \\
 & \text{return } r
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

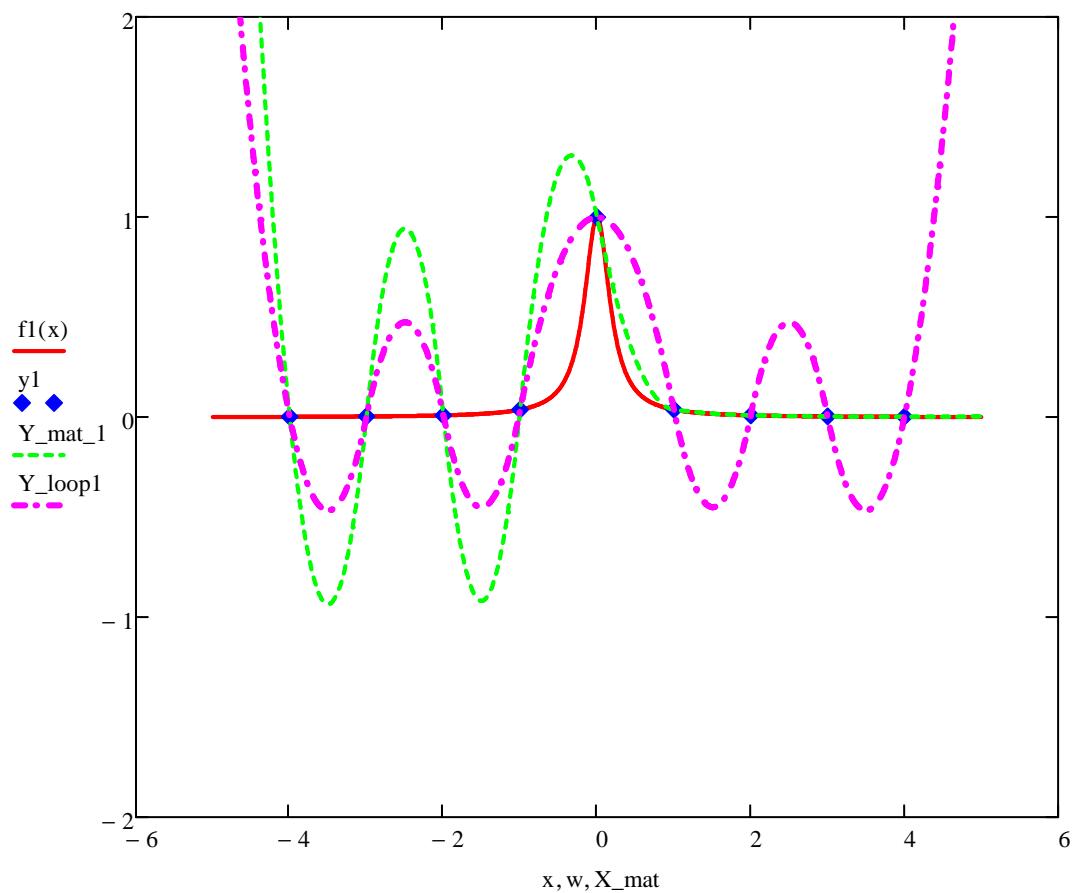
Wyliczenie współczynników:

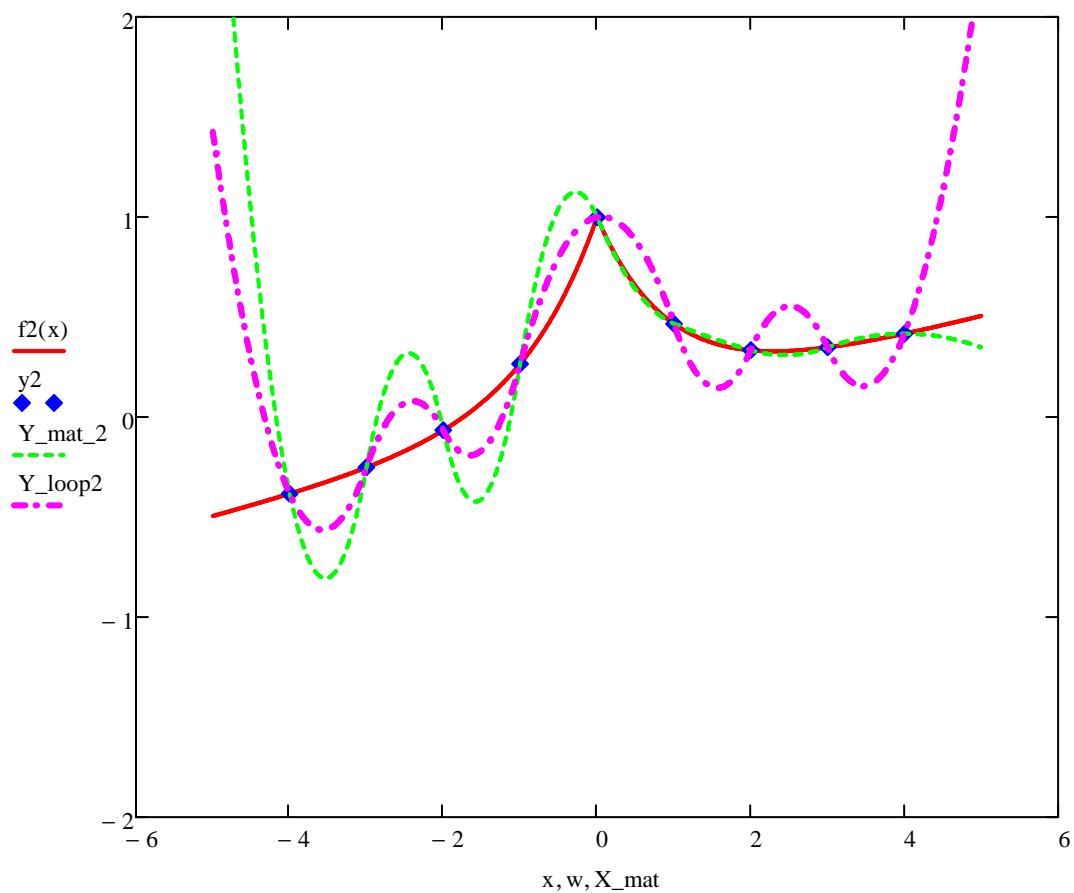
| | 0 |
|------------------------------|---------------------------|
| 0 | 1.877 |
| 1 | -1.875 |
| 2 | -1.873 |
| 3 | 1.879 |
| 4 | 1.896 |
| 5 | -1.868 |
| 6 | -0.963 |
| sloop_1 := S_loop(w, y1) = 7 | 1.925 |
| 8 | -0.96 |
| 9 | -1.931 · 10 ⁻³ |
| 10 | 1.893 |
| 11 | -1.921 |
| 12 | -1.87 |
| 13 | 1.864 |
| 14 | 1.873 |
| 15 | -1.875 |

| | 0 |
|------------------------------|--------|
| 0 | 0.97 |
| 1 | -0.839 |
| 2 | -0.916 |
| 3 | 1.102 |
| 4 | 1.063 |
| 5 | -0.731 |
| 6 | -0.664 |
| sloop_2 := S_loop(w, y2) = 7 | 1.396 |
| 8 | -0.601 |
| 9 | 0.069 |
| 10 | 1 |
| 11 | -1.133 |
| 12 | -0.853 |
| 13 | 0.868 |
| 14 | 0.907 |
| 15 | -0.839 |

Y_loop1 := S(sloop_1, w, y1, x1, step, x2)

Y_loop2 := S(sloop_2, w, y2, x1, step, x2)





Warto przy tym zauważyć, że w przypadku funkcji 1 uzyskaliśmy SPLINE-2 okresową, gdyż wartości w pierwszym i ostatnim węźle były takie same.